有限群の既約表現を用いた群行列式の因数分解

九州大学 大学院数理学府 数理学専攻
新居　里紗 (Risa NII) *

Abstract
すべての因数分解に適用できる公式は、現在存在しない。ゆえに私は、長年それを作りたいと考えている。そこで、まず様々な群の表現の既約分解と多変数多項式の因数分解の対応関係を、群の構造と表現論の研究を通して明らかにした。この研究では、こうした因数分解の解法を成り立たせている原理を、一般の有限群の群表から得られる群行列式と表現論を用いて説明する。この研究によって因数分解が容易になる場合があるという利点がある。群表から愚直に群行列式を計算すると膨大な労力が必要であるが、既約表現から群行列式を求めると比較的簡単だからだ。2 次、3 次、4 次巡回群、正 2 面体群、2 次巡回群の直積群で調べ、このレポートでは正 2 面体群の場合についてまとめた。**群行列式**を使うことによって、群表や計算ソフトウエアを使わずとも計算を進めることができる。

1　導入

1.1　群の表現

一般に群の複素ベクトル空間上の表現とは、準同型

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$$

のことである。ここで $\mathrm{GL}(V)$ は V から V への線形同型写像全体のなす群である。V の次元 $\dim V$ を、表現 ρ の次数という。

d 次正則複素行列のなす群

$$\mathrm{GL}_d(\mathbb{C}) = \{\, A \in M_d(\mathbb{C}) \mid \det A \neq 0 \,\}$$

を d 次複素一般線形群とよぶ。

定義 1.1. 群行列式
有限群 G の d 次線形表現を

$$T\colon G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$$

とする。$G = \{x_1, \ldots, x_n\}$ とし，各 x_i に対応する変数を a_i とする。このとき

$$\Theta_T = \det\left(\sum_{i=1}^{n} T(x_i)\, a_i\right)$$

を組 (G, T) の群行列式という。ここで $\det(\cdot)$ は行列式を表す。
行列 $T(x_i)$ の (k, l) 成分を $t_{kl}(x_i)$ と書くと，

$$T(x_i) = \big(t_{kl}(x_i)\big)_{1\le k,l\le d}$$

* E-mail:nii.risa.033@s.kyushu-u.ac.jp

であり，これは複素数を成分とする行列である。したがって

$$T(x_i)a_i = \left(t_{kl}(x_i)a_i\right)_{1\leq k,l\leq d}$$

となる。このとき

$$\sum_{i=1}^{n} T(x_i)a_i$$

の各成分は，変数 $a_1, \ldots, a_n$ の一次式である。

定義 1.2 (正則表現)**.** 有限群 $G = \{x_1, \ldots, x_n\}$ とする。$x_1, \ldots, x_n$ を基底とする複素ベクトル空間を V とする。すなわち

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \;\middle|\; c_i \in \mathbb{C} \right\}$$

である。群 G の元 g を左から作用させることにより，

$$gx_i = x_j$$

となる j が一意に定まる。したがって，この作用は基底 $x_1, \ldots, x_n$ の入れ替えを与える。

任意の $v = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \in V$ に対し，

$$T(g)v = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(gx_i\right)$$

1.2　巡回群の正則表現の例 ($n = 2$)

具体的に n 次巡回群を考える。群 $G = \langle g \rangle$, $g^2 = 1$ で生成される 2 次巡回群を考える。複素ベクトル空間 V の基底は $\{1, g\}$ であり、任意の $v \in V$ は

$$v = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot g$$

と書ける。作用 $T(g^k)$ は

$$T(g^k)(v) = c_1 g^k + c_2 g^{k+1}$$

で与えられる。この作用は V から V への線形写像となる。

基底 $\{1, g\}$ に関する行列表示は次の通りである：

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

定義 1.3 (表現の同値)**.** 群 G の 2 つの表現

$$T_1 \colon G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C}), \quad T_2 \colon G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$$

が同値とは、次の条件を満たすことをいう：

$$\exists P \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C}) \ s.t.\ T_1(x) = PT_2(x)P^{-1}, \quad \forall x \in G.$$

このとき、$T_1 \sim T_2$ と書く。これは、$V = \mathbb{C}^d$ の基底変換に対応している。

命題 1.4. $T_1 \sim T_2$ であるとき、群行列式は等しい：

$$\Theta_{T_1} = \Theta_{T_2}.$$

Proof. 一般に $X, P \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ のとき、

$$\det(PXP^{-1}) = \det(P)\det(X)\det(P^{-1}) = \det(X)$$

である。さらに、$T_1(x) = PT_2(x)P^{-1}$ のとき、

$$\begin{aligned}
\Theta_{T_1} &= \det\left(\sum_{i=1}^{n} T_1(x_i)a_i\right) \\
&= \det\left(\sum_{i=1}^{n} PT_2(x_i)P^{-1}a_i\right) \\
&= \det\left(P\Bigl(\sum_{i=1}^{n} T_2(x_i)a_i\Bigr)P^{-1}\right) \\
&= \det\left(\sum_{i=1}^{n} T_2(x_i)a_i\right) \\
&= \Theta_{T_2}.
\end{aligned}$$

□

定義 1.5 (表現の直和)**.** T を群 G の表現とする：

$$T\colon G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$$

を

$$T(x) = \begin{pmatrix} T_1(x) & 0 \\ 0 & T_2(x) \end{pmatrix}, \quad \forall x \in G$$

とする。ただし、$T_1(x)$ は d_1 次行列、$T_2(x)$ は d_2 次行列である。

このとき、$x \in G$ に $T_i(x)$ を対応させる写像

$$T_i\colon G \to \mathrm{GL}_{d_i}(\mathbb{C})$$

は G の表現を与える。このとき

$$T = T_1 \oplus T_2$$

と書き、表現 T を T_1 と T_2 の直和 *(direct sum)* という。

命題 1.6. 有限群 G とその表現 T_1, T_2 を考える。$T = T_1 \oplus T_2$ とすると、群行列式は次の積で表される：

$$\Theta_T = \Theta_{T_1} \Theta_{T_2}.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\Theta_T &= \det\left(\sum_{i=1}^{n} T(x_i) a_i\right) \\
&= \det\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \begin{pmatrix} T_1(x_i) & 0 \\ 0 & T_2(x_i) \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i T_1(x_i) & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{n} a_i T_2(x_i) \end{pmatrix} \\
&= \det\left(\sum_{i=1}^{n} a_i T_1(x_i)\right) \cdot \det\left(\sum_{i=1}^{n} a_i T_2(x_i)\right) \\
&= \Theta_{T_1} \Theta_{T_2}.
\end{aligned}$$

□

1.3 群行列式に関する定理

定義 1.7. 表現 T が直既約であるとは、

$$T \not\sim T_1 \oplus T_2$$

を満たすこと、ただし T_1, T_2 は非自明な表現である。このレポートでは有限群の複素数体上の表現の場合のみ扱い、このとき直既約な表現は既約な表現に一致する。以下、直既約のことを既約と書く。

定理 1.8 (フロベニウス)**.** 群 G の既約表現 T に対して、群行列式

$$\Theta_T = \det\left(\sum_{i=1}^{n} T(x_i) a_i\right)$$

は、変数 $a_1, \ldots, a_n$（$n = |G|$）の多項式として既約である。

定理 1.9. 有限群 G の既約表現の同値類は、G の共役類の個数だけある。

定理 1.10. $T_1, T_2, \ldots, T_k$ を互いに同値でない G の全ての既約表現とする。T_j の次数を d_j とすると、G の正則表現 R は次のように分解される：

$$R \sim d_1 T_1 \oplus d_2 T_2 \oplus \cdots \oplus d_k T_k.$$

したがって、群行列式は

$$\Theta_R = \prod_{i=1}^{k} \Theta_{T_i}^{d_i}$$

となる。上のフロベニウスの定理により、これは群行列式の既約多項式への因数分解に対応する。

1.4 群表

定義 1.11 (群表)**.** デデキント全集にもある通り *(Dedekind, Gesammelte mathematische Werke, Band II,* 423 *S.)*、群 G の 群表 とは、i 行 j 列に積 $x_i x_j^{-1}$ を書いた表のことである。群 G の正則表現 R の行列表示から、群表を得ることができる。すなわち、

$$\sum_{i=1}^{n} R(x_i)x_i$$

は G の群表を与える。

2 正 2 面体群 D_{2n} の行列表示

ここでは、正 2 面体群の回転、鏡映の様子を行列を用いて説明する。そのあと、群表から得られる群行列式を用いて行列式の値を計算する。正 2 面体群 D_{2n} は、空間にある正 n 角形を自分自身に重ね合わせる回転、鏡映全体のなす群である。位数は $|D_{2n}| = 2n$。

2.1 群の元

正 n 角形の対称群である正 2 面体群 D_{2n} は，次の生成元と関係式によって定義される：

$$D_{2n} = \langle\, a, b \mid a^n = e,\ b^2 = e,\ bab^{-1} = a^{-1}\,\rangle.$$

- 中心 O 周りの回転：
$$e, a, a^2, \dots, a^{n-1}$$
- 対称軸に関する鏡映：
$$b, ba, ba^2, \dots, ba^{n-1}$$

よってこれらを合わせて $2n$ 個の元がある。

2.2 3 次元行列表示

$$a = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} & 0 \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3 2 次元表現

xy 平面に制限すると

$$R_l(a) := \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi l}{n} & -\sin\frac{2\pi l}{n} \\ \sin\frac{2\pi l}{n} & \cos\frac{2\pi l}{n} \end{pmatrix}, \quad R_l(b) := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad l = 0, 1, \dots, n-1$$

となる。このとき

$$R_l : D_{2n} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \quad a \mapsto R_l(a),\ b \mapsto R_l(b)$$

は D_{2n} の表現である。

2.4 複素行列による $\mathbb{C}$ 表現

回転行列は $\mathbb{C}$ 上で初めて対角化できるので、$\omega = e^{2\pi i/n}$ とすると

$$R'_l(a) \coloneqq \begin{pmatrix} \omega^l & 0 \\ 0 & \omega^{-l} \end{pmatrix}, \quad R'_l(b) \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき

$$R'_l : D_{2n} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

が得られ、実際に R_l と R'_l は同値である。なぜなら、

$$S = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} \implies SR_lS^{-1} = R'_l, \quad R_l \sim R'_{l} \iff l = -l' \pmod n)$$

3 既約表現の分類

3.1 1 次表現

■n が偶数の場合

$$\begin{aligned}
\xi_0 &: a \mapsto 1, \quad b \mapsto 1 \\
\xi_1 &: a \mapsto 1, \quad b \mapsto -1 \\
\xi_2 &: a \mapsto -1, \quad b \mapsto 1 \\
\xi_3 &: a \mapsto -1, \quad b \mapsto -1
\end{aligned}$$

■n が奇数の場合

$$\begin{aligned}
\xi_0 &: a \mapsto 1, \quad b \mapsto 1 \\
\xi_1 &: a \mapsto 1, \quad b \mapsto -1
\end{aligned}$$

3.2 2 次既約表現

- n が偶数のとき： $R'_1, \ldots, R'_{(n/2)-1}$
- n が奇数のとき： $R'_1, \ldots, R'_{(n-1)/2}$

4 群行列式の計算例

注 4.1. 以降、x_i に対応する変数 a_i を、a_i の代わりに x_i を用いて書く。元 D_{2n} の元 x_i は a, b を用いて表されるため混同しない。

4.1 $n = 2$ の場合 (D_4)

$$D_4 = \{e, a, b, ab\}, \quad |D_4| = 4$$

■**群表**

$$e = x_1, a = x_2, b = x_3, ab = x_4$$

と変数変換して

	x_1^{-1}	x_2^{-1}	x_3^{-1}	x_4^{-1}
x_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	x_2	x_1	x_4	x_3
x_3	x_3	x_4	x_1	x_2
x_4	x_4	x_3	x_2	x_1

■**1 次表現の群行列式**

$$\begin{aligned}
\Theta_{\xi_0} &= |x_1 + x_2 + x_3 + x_4| = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
\Theta_{\xi_1} &= |x_1 + x_2 - x_3 - x_4| = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\
\Theta_{\xi_2} &= |x_1 - x_2 + x_3 - x_4| = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\
\Theta_{\xi_3} &= |x_1 - x_2 - x_3 + x_4| = x_1 - x_2 - x_3 + x_4
\end{aligned}$$

となる。群行列式の積は

$$\Theta_{\xi_0}\Theta_{\xi_1}\Theta_{\xi_2}\Theta_{\xi_3} = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$$

4.2 $n = 3$ の場合 (D_6)

$$D_6 = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\} \quad |D_6| = 6$$

である。

■**群表**

$$e = x_1, a = x_2, a^2 = x_3, b = x_4, ab = x_5, a^2b = x_6$$

と変数変換して

	x_1^{-1}	x_2^{-1}	x_3^{-1}	x_4^{-1}	x_5^{-1}	x_6^{-1}
x_1	x_1	x_3	x_2	x_4	x_5	x_6
x_2	x_2	x_1	x_3	x_5	x_6	x_4
x_3	x_3	x_2	x_1	x_6	x_4	x_5
x_4	x_4	x_5	x_6	x_1	x_3	x_2
x_5	x_5	x_6	x_4	x_2	x_1	x_3
x_6	x_6	x_4	x_5	x_3	x_2	x_1

■**1 次表現の群行列式**

$$\begin{aligned}
\Theta_{\xi_0} &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\
\Theta_{\xi_1} &= x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6
\end{aligned}$$

■**2 次表現 R'_1 の群行列式**

$$R'_1(a) = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \quad R'_1(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = e^{2\pi i/3}$$

$$\Theta_{R'_1} = \left| x_1 I_2 + x_2 R'_1(a) + x_3 R'_1(a^2) + x_4 R'_1(b) + x_5 R'_1(ab) + x_6 R'_1(a^2b) \right|.$$

1 の原始 3 乗根 ω の性質 $\omega^3=1, \omega^2+\omega=-1$ を用いてこの行列式を計算すると

$$\begin{aligned}\Theta_{R_1'} &= (x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)(x_1+\omega^{-1}x_2+\omega^{-2}x_3)-(x_4+\omega x_5+\omega^2 x_6)(x_4+\omega^{-1}x_5+\omega^{-2}x_6)\\ &= x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1-\left(x_4^2+x_5^2+x_6^2-x_4x_5+x_5x_6+x_6x_4\right)\end{aligned}$$

したがって**群表から計算した群行列式の積**

$$\Theta_{\xi_0}\Theta_{\xi_1}(\Theta_{R_1'})^2$$

と一致することが確認できる。

4.3　$n=4$ の場合 (D_8)

n は偶数であり、D_8 の既約表現は

$$1\text{ 次表現: } \xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3, \quad 2\text{ 次表現: } R_1'$$

である。群 D_8 の元は

$$D_8=\{e,a,a^2,a^3,b,ab,a^2b,a^3b\}$$

■群表

$$e=x_1, a=x_2, a^2=x_3, a^3=x_4, b=x_5, ab=x_6, a^2b=x_7, a^3b=x_8$$

と変数変換して

	x_1^{-1}	x_2^{-1}	x_3^{-1}	x_4^{-1}	x_5^{-1}	x_6^{-1}	x_7^{-1}	x_8^{-1}
x_1	x_1	x_4	x_3	x_2	x_5	x_6	x_7	x_8
x_2	x_2	x_1	x_4	x_3	x_6	x_7	x_8	x_5
x_3	x_3	x_2	x_1	x_4	x_7	x_8	x_5	x_6
x_4	x_4	x_3	x_2	x_1	x_8	x_5	x_6	x_7
x_5	x_5	x_6	x_7	x_8	x_1	x_4	x_3	x_2
x_6	x_6	x_7	x_8	x_5	x_2	x_1	x_4	x_3
x_7	x_7	x_8	x_5	x_6	x_3	x_2	x_1	x_4
x_8	x_8	x_5	x_6	x_7	x_4	x_3	x_2	x_1

■1 次表現の群行列式

$$\begin{aligned}\Theta_{\xi_0}&=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8\\ \Theta_{\xi_1}&=x_1+x_2+x_3+x_4-x_5-x_6-x_7-x_8\\ \Theta_{\xi_2}&=x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-x_6+x_7-x_8\\ \Theta_{\xi_3}&=x_1-x_2+x_3-x_4-x_5+x_6-x_7+x_8\end{aligned}$$

■2 次表現 R_1' の群行列式

$$R_1'(a)=\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix},\quad R_1'(b)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Theta_{R_1'}=\left|x_1I_2+x_2R_1'(a)+x_3R_1'(a^2)+x_4R_1'(a^3)+x_5R_1'(b)+x_6R_1'(ab)+x_7R_1'(a^2b)+x_8R_1'(a^3b)\right|.$$

$\omega=e^{2\pi i/4}=i$ を用いて計算すると

$$\begin{aligned}\Theta_{R_1'}&=\begin{vmatrix} x_1+\omega x_2+\omega^2x_3+\omega^3x_4 & x_5+\omega x_6+\omega^2x_7+\omega^3x_8\\ x_5+\omega^{-1}x_6+\omega^{-2}x_7+\omega^{-3}x_8 & x_1+\omega^{-1}x_2+\omega^{-2}x_3+\omega^{-3}x_4\end{vmatrix}\\ &=x_1^2-2x_1x_3+x_2^2-2x_2x_4+x_3^2+x_4^2-x_5^2+2x_5x_7-x_6^2+2x_6x_8-x_7^2-x_8^2\end{aligned}$$

$$\Theta_{\xi_0}\Theta_{\xi_1}\Theta_{\xi_2}\Theta_{\xi_3}\Theta_{R_1'} = (x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8)(x_1+x_2+x_3+x_4-x_5-x_6-x_7-x_8)$$
$$(x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-x_6+x_7-x_8)(x_1-x_2+x_3-x_4-x_5+x_6-x_7+x_8)$$
$$(x_1^2-2x_1x_3+x_2^2-2x_2x_4+x_3^2+x_4^2-x_5^2+2x_5x_7-x_6^2+2x_6x_8-x_7^2-x_8^2)^2$$

これにより、**群表から計算した群行列式の積**

$$\Theta_{\xi_0}\Theta_{\xi_1}\Theta_{\xi_2}\Theta_{\xi_3}(\Theta_{R_1'})^2$$

と一致することが確認できる。

注 4.2. D_4 は $C_2 \times C_2$ と同型な可換群である。この結果は $C_2 \times C_2$ の直積群の場合と等しくなる。

5 今後の展望

巡回群の群表から得られる群行列式も、正則表現から考えた群行列式のどちらも同じになる。今回、ある種の対称性をもった多項式は群の表現を用いて因数分解できることが分かったので、今後は様々な群から得られる多変数多項式において既約分解をしたい。また対称性をもった群から作られる群表にも対称性が現れているので、その規則性についても考えたい。表現論の観点から因数分解の解法を見つけ法則化したい。

6 参考文献

References

[1] R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke*, Band II, 423 S., Braunschweig: Vieweg, 1894.

[2] 藤原松三郎，代数学 第 2 巻，内田老鶴圃，2019.

[3] 川中宣明，覚えられる (？)3、4 次方程式の解法，数学セミナー，日本評論社，2000 年 2 月号.

[4] 志賀浩二，群論への 30 講，朝倉書店，1989.

[5] B. Steinberg, *Representation Theory of Finite Groups: An Introductory Approach*, Springer, 2012.

[6] ファン・デル・ヴェルデン, 代数学の歴史一 アル-クワリズミからエミー・ネーターへ 一，加藤明史訳，現代数学社，1994.